Het wezen van de wiskunde

Adhemar Bultheel

Dept. Computer Science, KU Leuven

Gent, November 2016

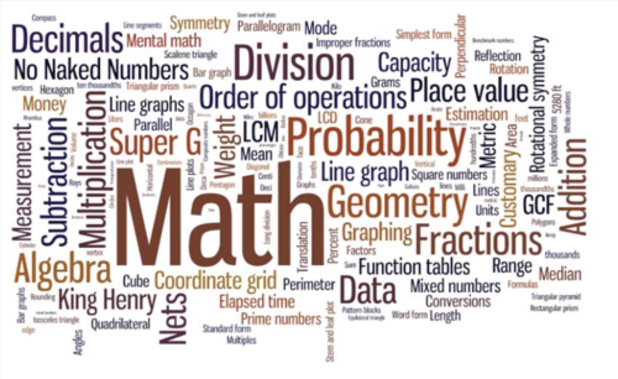
http://nalag.cs.kuleuven.be/papers/ade/GENT16

Wat is wiskunde?

Overzicht

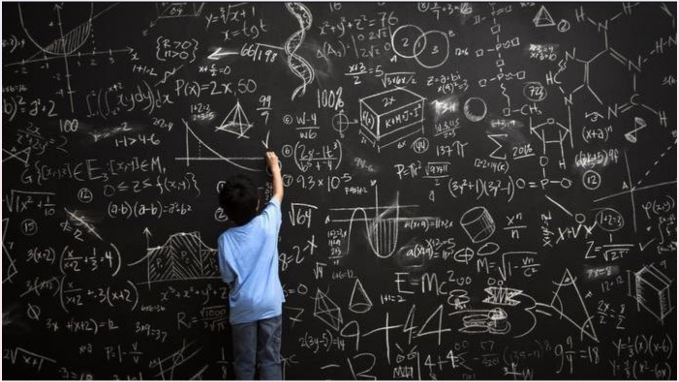
- wat is wiskunde
- wiskunde evolueerd in de tijd (overzicht)
- wiskundige problemen anno 2016
  - Riemann hypothese
  - Vermoeden van Kepler

Wat is wiskunde?



Wiskunde heeft veel (zichtbare) vertakkingen.
Wiskunde zit overal in onze maatschappij verweven.

Wat is wiskunde?



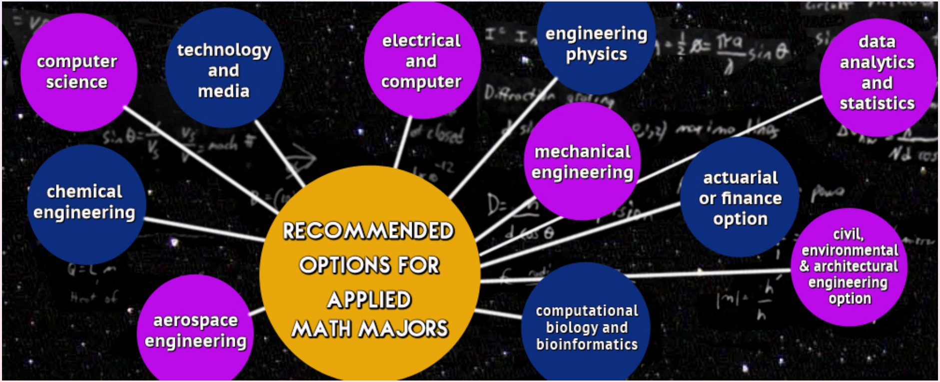
Is wiskunde een hokus pokus van formules?
Enkel voor nerds?
Wiskunde is voor iedereen, en is meer dan (hoofd)rekenen.

Wat is wiskunde?

Het is nog steeds bon-ton om te zeggen
"Wiskunde daar ken ik niets van"
maar men wil nog wel uitblinken in het Groot Dictee

Is wiskunde alleen maar fun?

Wat is wiskunde?



Is wiskunde alleen voor de toepassingen?

Wat is wiskunde?

bron: http://www.rpmprime.com

Wiskunde is al het vorige
met vele vertakkingen als kruin
en evenveel wortels om zich recht te houden

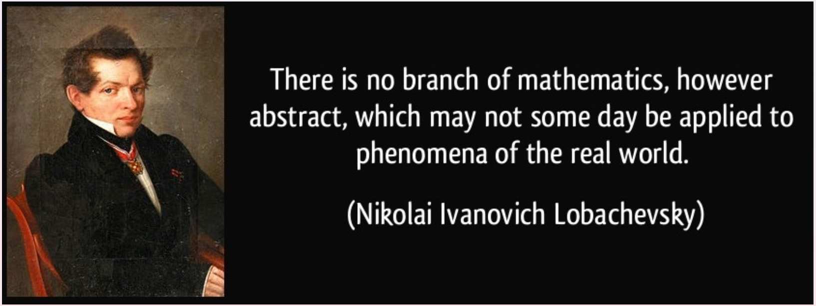
Zuivere wiskunde...

Zuiver of toegepast. Waar begint en waar eindigt wiskunde?

"I have never done anything 'useful'. No discovery of mine has made, or is likely to make, directly or indirectly, for good or ill, the least difference to the amenity of the world."

G.H. Hardy

... of toegepaste wiskunde?



zuiver of toegepast?

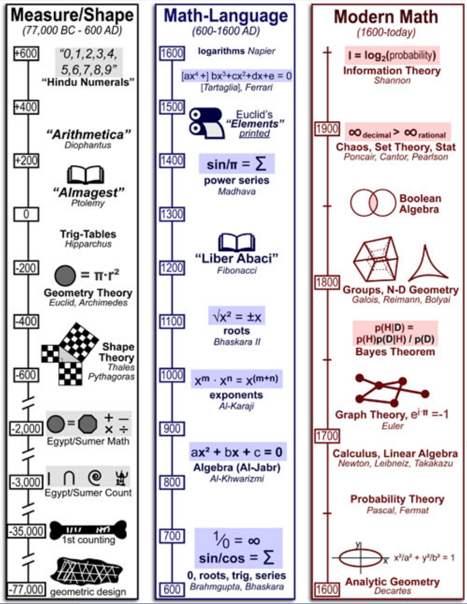
Wiskunde wordt gestimuleerd door toepassingen en omgekeerd

Een wetenschap is maar matuur
in de mate
dat ze gebruik maakt van wiskunde

Is wiskunde ontdekt door observatie (Plato)
of
is wiskunde een menselijke creatie?

Max Tegmark: (*Our mathematical universe*)
Ons universum is (eindige) wiskunde.

Wiskunde evolueert in de tijd



bron: practically science

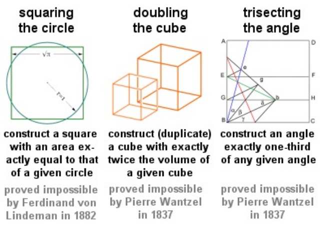
Historische groei

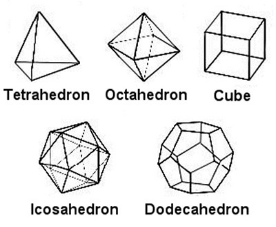
- Prehistorie ($\approx$ 22.000 BC)

(Ishango beentjes, Kongo, 1960)

- Babylonië/Soemerië/Egypte ($<$ 6.000 BC)

- Grieken Pythagoras/Plato (500 BC)
  gehele getallen/ meetkunde/ paradoxen (Zeno)





bron: The story of mathematics

Historische groei

11 13 17 19

Ishanho beentjes ≈ 22.000 BC (Kongo, 1960)

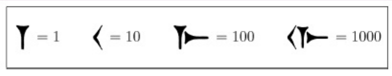
bron: Koninklijk Belgisch Instituut voor Natuurwetenschappen, Brussel

Historische groei

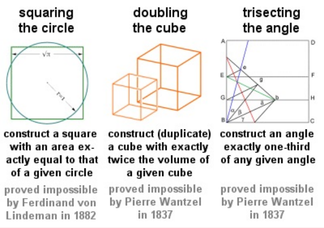
- Prehistorie ($\approx$ 22.000 BC)

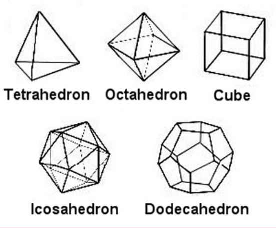
(Ishango beentjes, Kongo, 1960)

- Babylonië/Soemerië/Egypte ($<$ 6.000 BC)



- Grieken Pythagoras/Plato (500 BC)
  gehele getallen/ meetkunde/ paradoxen (Zeno)

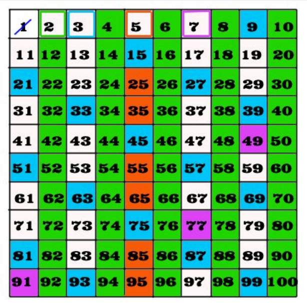




bron: The story of mathematics

Historische groei

- (zeef van) Erathostenes (300 BC)



- Euclides: meetkunde: axiomatisch systeem (5 axioma's) verhoudingen (rationale getallen)
- Diophantus: vergelijkingen bv. $x^n + y^n = z^n$ (FLT 1637-Wiles 1995)

Historische groei

- Hindu-Chinees-Arabische cijfers vervangen romeinse

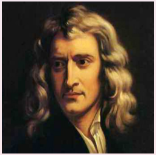
٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

(1100)

- Grieks → Arabisch (Al-Khwarizmi) → Latijn → Liber Abacci (Fibonacci) (1200)
- algebra ($ax^2 + bx + c = 0$, negatieve en complexe getallen) notatie en formules ($+, -, \times, =, \sqrt{\ }$) (1500-1600)
- astronomie (Galileo, Kepler - 1600)

Gouden Eeuw (17de)

- John Napier: logaritme
  $\log(ab) = \log(a) + \log(b), \log(a/b) = \log(a) - \log(b)$ (1614)
- Newton en Leibniz: calculus (1666)
- Descartes (algebraïsche meetkunde), Fermat, Pascal (kansrekening), Bernoulli's

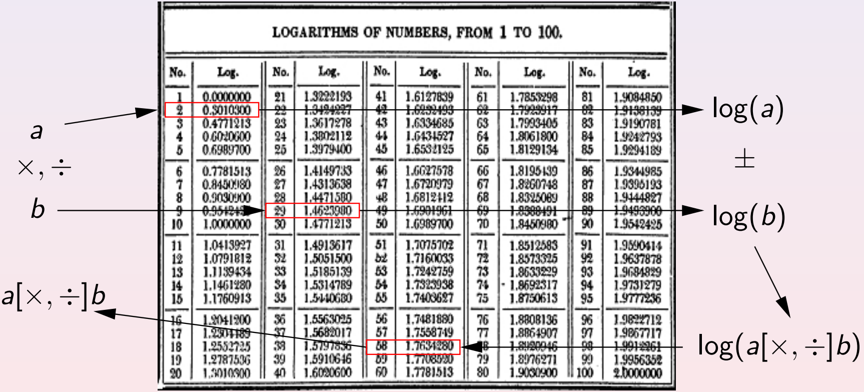




bronnen:
BBC / Wikipedia /
MacTutor History of Mathematics

Historische groei

basis 10 logaritmetafel



LOGARITHMS OF NUMBERS, FROM 1 TO 100.

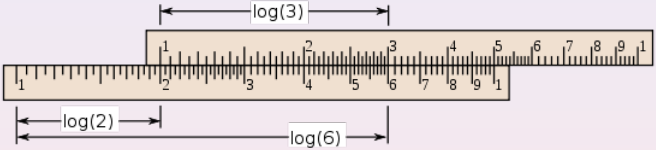
No.	Log.	No.	Log.	No.	Log.	No.	Log.	No.	Log.
1	0.0000000	21	1.3222193	41	1.6127839	61	1.7853298	81	1.9084850
2	0.3010300	22	1.3424227	42	1.6232493	62	1.7923917	82	1.9138139
3	0.4771213	23	1.3617278	43	1.6334685	63	1.7993405	83	1.9190781
4	0.6020600	24	1.3802112	44	1.6434527	64	1.8061800	84	1.9242793
5	0.6989700	25	1.3979400	45	1.6532125	65	1.8129134	85	1.9294189
6	0.7781513	26	1.4149733	46	1.6627578	66	1.8195439	86	1.9344985
7	0.8450980	27	1.4313638	47	1.6720979	67	1.8260748	87	1.9395193
8	0.9030900	28	1.4471580	48	1.6812412	68	1.8325089	88	1.9444827
9	0.9542425	29	1.4623980	49	1.6901961	69	1.8388491	89	1.9493900
10	1.0000000	30	1.4771213	50	1.6989700	70	1.8450980	90	1.9542425
11	1.0413927	31	1.4913617	51	1.7075702	71	1.8512583	91	1.9590414
12	1.0791812	32	1.5051500	52	1.7160033	72	1.8573325	92	1.9637878
13	1.1139434	33	1.5185139	53	1.7242759	73	1.8633229	93	1.9684829
14	1.1461280	34	1.5314789	54	1.7323938	74	1.8692317	94	1.9731279
15	1.1760913	35	1.5440680	55	1.7403627	75	1.8750613	95	1.9777236
16	1.2041200	36	1.5563025	56	1.7481880	76	1.8808136	96	1.9822712
17	1.2304489	37	1.5682017	57	1.7558749	77	1.8864907	97	1.9867717
18	1.2552725	38	1.5797836	58	1.7634280	78	1.8920946	98	1.9912261
19	1.2787536	39	1.5910646	59	1.7708520	79	1.8976271	99	1.9956352
20	1.3010300	40	1.6020600	60	1.7781513	80	1.9030900	100	2.0000000

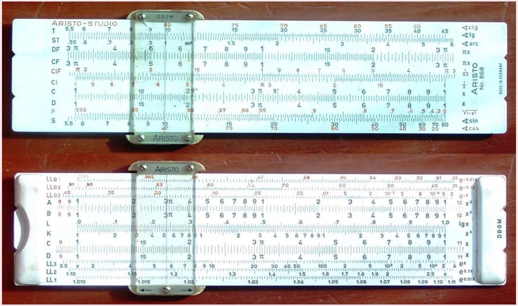
(Wet van Benford - Betekenis e)

$Pr(d) = \log_{10}(1 + 1/d)$ - $e = \lim_{n\to\infty}(1 + 1/n)^n = 2.718281...$

Historische groei

de schuiflat



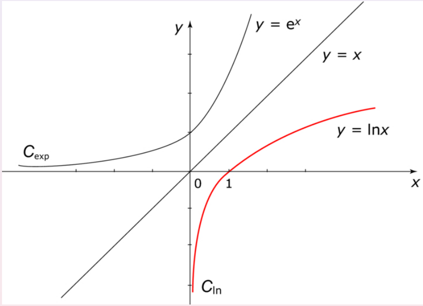


bron: http://tinas-sliderules.me.uk

Aristo-Studio-868

Historische groei

Logaritme



- $\log(ab) = \log(a) + \log(b), \qquad \log(a/b) = \log(a) - \log(b)$
- $\log(a^b) = b\log(a)$, $\log(1) = 0$
- $\ln(x) = \log_e(x)$, $e = \sum_{k=1}^{\infty} 1/k! = 2.718281\ldots$
- $y = \ln(x) \Leftrightarrow x = e^y$

De 18de eeuw

- Euler (18de) $[e, i, \pi, f(x), \Sigma, \sin, \cos, \ldots]$
  Königsberg (grafen)

bron: Wikipedia

De 19de eeuw

- Fourier (reeksen)
- Bolyai, Lobachevsky, Riemann (niet Euclidische meetkunde)
- Riemann, Cauchy, Weierstrass, Gauss (analyse)



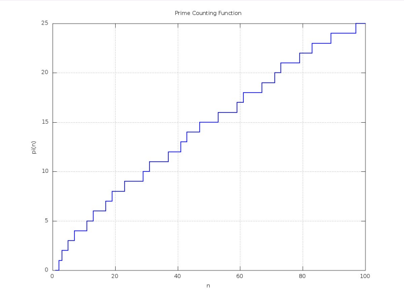


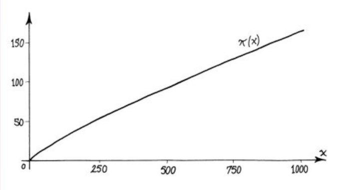



bronnen:
Wikipedia /
MacTutor History of Mathematics

Historische groei

Gauss (1792: 15 jaar)





$\pi(x) =$ aantal priemgetallen $< x$

$\pi(x) \approx \frac{x}{\log(x)}, \quad x \to \infty$

Riemann: Dat kan nauwkeuriger $\to$ Riemann hypothese (1859)

De 19de eeuw (vervolg)

- Boole (binaire algebra, verzamelingen)
- Cantor ($|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0, \ |\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$)
- Poincaré (chaos theorie)

De 20ste eeuw

- Russell and Whitehead (Principia Mathematica)
- Gödel ("Deze uitspraak kan men niet bewijzen" $\rightarrow$ onvolledigheidsstelling)
- Hilbert (1900 Parijs: millennium problemen)
- Turing (stopprobleem - Turing machine)
- Weil (Bourbaki)

Wiskundige problemen

bron: Wikipedia

David Hilbert ICM Parijs 1900:

23 millennium problemen

- 10 zijn opgelost
- 8 gedeeltelijk opgelost
- 3 onopgelost
- 2 waren te vaag

Clay Mathematics Institute 2000:

7 Millennium Prize Problems (1M dollar)

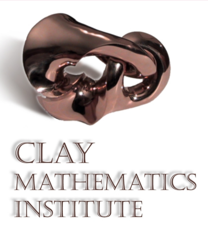
- P versus NP probleem
- Hodge vermoeden
- Poincaré vermoeden (Perelman 2003)
- Riemann hypothese
- Yang–Mills bestaan en massa sprong
- Navier–Stokes bestaan en gladheid
- Birch en Swinnerton-Dyer vermoeden

Wiskundige problemen

David Hilbert ICM Parijs 1900:

23 millennium problemen

- 10 zijn opgelost
- 8 gedeeltelijk opgelost
- 3 onopgelost
- 2 waren te vaag



Clay Mathematics Institute 2000:

7 Millennium Prize Problems (1M dollar)

- P versus NP probleem
- Hodge vermoeden
- Poincaré vermoeden (Perelman 2003)
- Riemann hypothese
- Yang–Mills bestaan en massa sprong
- Navier–Stokes bestaan en gladheid
- Birch en Swinnerton-Dyer vermoeden

Priemgetallen

Priemgetal: geheel getal > 1 en enkel deelbaar door 1 en zichzelf

Er zijn oneindig veel priemgetallen

Euclides (300 BC): Bewijs uit ongerijmde

Stel $p_1, p_2, \ldots, p_n$ zijn alle priemgetallen, dan is $p_1 p_2 \cdots p_n + 1$ ook priem.

Nadien nog veel andere bewijzen:

Euler (17??), Fürstenberg (195?), Erdős (19??), Saidak (2003), Pinasco (2009), Whang (2010), Shen (2016),...

Hoofdstelling van de rekenkunde:

Euclides

Elk natuurlijk getal is op een enige manier te schrijven als een product van zijn priemdelers.

Bouwstenen: priemgetallen $\rightarrow$ natuurlijke $\rightarrow$ negatieve $\rightarrow$ rationale $\rightarrow$ reëele $\rightarrow$ complexe $\rightarrow$ ... ¿de hele wiskunde?

Priemgetallen

Priemgetal: geheel getal > 1 en enkel deelbaar door 1 en zichzelf
Er zijn oneindig veel priemgetallen
Euclides (300 BC): Bewijs uit ongerijmde
Stel $p_1, p_2, \ldots, p_n$ zijn alle priemgetallen, dan is $p_1 p_2 \cdots p_n + 1$ ook priem.
Nadien nog veel andere bewijzen:
Euler (17??), Fürstenberg (195?), Erdős (19??), Saidak (2003), Pinasco (2009), Whang (2010), Shen (2016),...
Hoofdstelling van de rekenkunde:
Euclides
Elk natuurlijk getal is op een enige manier te schrijven als een product van zijn priemdelers.
Bouwstenen: priemgetallen $\rightarrow$ natuurlijke $\rightarrow$ negatieve $\rightarrow$ rationale $\rightarrow$ reële $\rightarrow$ complexe $\rightarrow$ ... ¿de hele wiskunde?

Priemgetallen

Priemgetal: geheel getal > 1 en enkel deelbaar door 1 en zichzelf
Er zijn oneindig veel priemgetallen
Euclides (300 BC): Bewijs uit ongerijmde
Stel $p_1, p_2, \ldots, p_n$ zijn alle priemgetallen, dan is $p_1 p_2 \cdots p_n + 1$ ook priem.
Nadien nog veel andere bewijzen:
Euler (17??), Fürstenberg (195?), Erdős (19??), Saidak (2003), Pinasco (2009), Whang (2010), Shen (2016),...
Hoofdstelling van de rekenkunde:
Euclides
Elk natuurlijk getal is op een enige manier te schrijven als een product van zijn priemdelers.
Bouwstenen: priemgetallen $\to$ natuurlijke $\to$ negatieve $\to$ rationale $\to$ reële $\to$ complexe $\to$ ... ¿de hele wiskunde?

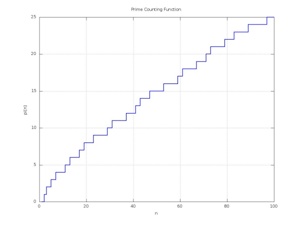
Priemgetallen

Priemgetal: geheel getal > 1 en enkel deelbaar door 1 en zichzelf
Er zijn oneindig veel priemgetallen
Euclides (300 BC): Bewijs uit ongerijmde
Stel $p_1, p_2, \ldots, p_n$ zijn alle priemgetallen, dan is $p_1 p_2 \cdots p_n + 1$ ook priem.
Nadien nog veel andere bewijzen:
Euler (17??), Fürstenberg (195?), Erdős (19??), Saidak (2003), Pinasco (2009), Whang (2010), Shen (2016),...
Hoofdstelling van de rekenkunde:
Euclides
Elk natuurlijk getal is op een enige manier te schrijven als een product van zijn priemdelers.
Bouwstenen: priemgetallen $\rightarrow$ natuurlijke $\rightarrow$ negatieve $\rightarrow$ rationale $\rightarrow$ reële $\rightarrow$ complexe $\rightarrow$ ... ¿de hele wiskunde?

Priemgetallen

Priemgetal: geheel getal > 1 en enkel deelbaar door 1 en zichzelf
Er zijn oneindig veel priemgetallen
Euclides (300 BC): Bewijs uit ongerijmde
Stel $p_1, p_2, \ldots, p_n$ zijn alle priemgetallen, dan is $p_1 p_2 \cdots p_n + 1$ ook priem.
Nadien nog veel andere bewijzen:
Euler (17??), Fürstenberg (195?), Erdős (19??), Saidak (2003), Pinasco (2009), Whang (2010), Shen (2016),...
Hoofdstelling van de rekenkunde:
Euclides
Elk natuurlijk getal is op een enige manier te schrijven als een product van zijn priemdelers.
Bouwstenen: priemgetallen $\to$ natuurlijke $\to$ negatieve $\to$ rationale $\to$ reële $\to$ complexe $\to$ ... ¿de hele wiskunde?

Priemgetallenstelling



$\pi(x)$ = aantal priemgetallen $< x$

Gauss (1777-1855): PGS

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)}{n/\log(n)} = 1$$

$\log(n) \approx$ aantal cijfers in n

Bewezen in 1896 door

Charles de la Vallée Poussin (1866-1962) en

Jacques Hadamard (1865-1963)

maakten gebruik van complexe analyse

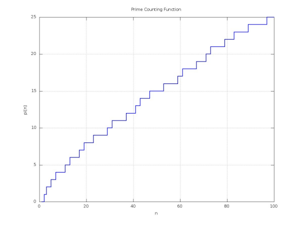
Een "eenvoudig" (maar lang) bewijs in 1949

(maakt gebruik van enkele eigenschappen van log)

Atle Selberg (1917-2007) [Fields Medal in 1950] en

door Paul Erdős (1913-1996) [Cole Prize in 1952].

Priemgetallenstelling



$\pi(x)$ = aantal priemgetallen $< x$

Gauss (1777-1855): PGS

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)}{n/\log(n)} = 1$$

$\log(n) \approx$ aantal cijfers in n

Bewezen in 1896 door

Charles de la Vallée Poussin (1866-1962) en

Jacques Hadamard (1865-1963)

maakten gebruik van complexe analyse

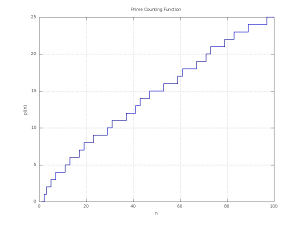
Een "eenvoudig" (maar lang) bewijs in 1949

(maakt gebruik van enkele eigenschappen van log)

Atle Selberg (1917-2007) [Fields Medal in 1950] en

door Paul Erdős (1913-1996) [Cole Prize in 1952].

Priemgetallenstelling



$\pi(x) =$ aantal priemgetallen $< x$
Gauss (1777-1855): PGS

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)}{n/\log(n)} = 1$$

$\log(n) \approx$ aantal cijfers in n

Bewezen in 1896 door
Charles de la Vallée Poussin (1866-1962) en
Jacques Hadamard (1865-1963)
maakten gebruik van complexe analyse
Een "eenvoudig" (maar lang) bewijs in 1949
(maakt gebruik van enkele eigenschappen van log)
Atle Selberg (1917-2007) [Fields Medal in 1950] en
door Paul Erdős (1913-1996) [Cole Prize in 1952].

Priemgetallenstelling

PGS:

$$\pi(n) \approx \frac{n}{\log(n)} \quad \text{voor } n \to \infty$$

Iets beter is

$$\pi(n) \approx \frac{n}{\log(n) - c}$$

maar ook (logaritmische integraal):

$$\pi(x) \approx \mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log(t)}$$

Priemgetallenstelling

PGS:

$$\pi(n) \approx \frac{n}{\log(n)} \quad \text{voor } n \to \infty$$

Iets beter is

$$\pi(n) \approx \frac{n}{\log(n) - c}$$

maar ook (logaritmische integraal):

$$\pi(x) \approx \mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log(t)}$$

Priemgetallenstelling

PGS:

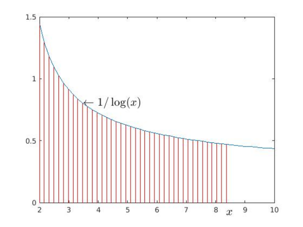
$$\pi(n) \approx \frac{n}{\log(n)} \quad \text{voor } n \to \infty$$

Iets beter is

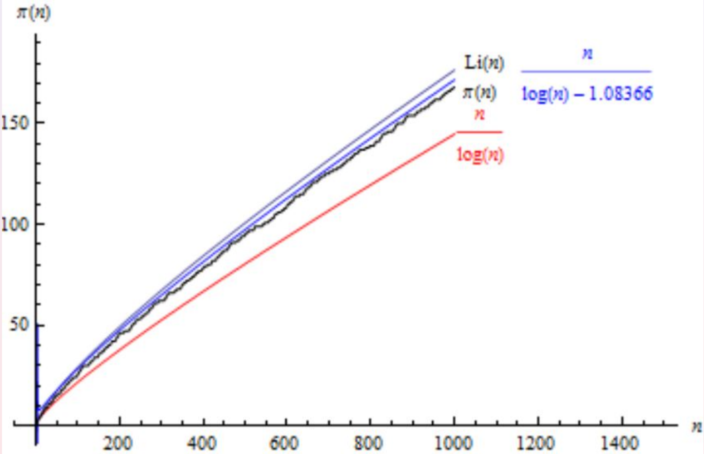
$$\pi(n) \approx \frac{n}{\log(n) - c}$$

maar ook (logaritmische integraal):

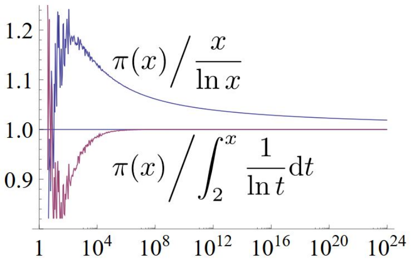
$$\pi(x) \approx \mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log(t)}$$



Priemgetallenstelling

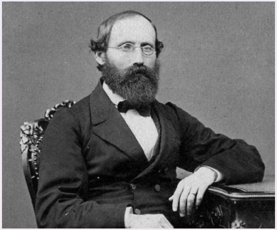


Priemgetallenstelling



$\frac{x}{\log(x)} < \pi(x) < \mathrm{Li}(x)$ (meestal maar niet altijd – zie verder)

Priemgetallenstelling



Bernhard Riemann* (1826-1866)

(na bijdragen van anderen)

Kunnen we een goede benadering vinden voor
of de exacte waarde berekenen van $\pi(x)$
Voor alle waarden van x
Zonder alle priemgetallen te kennen?

*bron: http://mathground.net/bernhard-riemann-1826-1866/

Back to the future

bron:
Kunstmuseum Basel
Wikimedia Commons

Leonhard Euler (1707-1783)

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \quad \text{dus} \quad \frac{1}{1-p^{-s}} = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \cdots$$

Herhaal voor alle priemgetallen p, vermenigvuldig en hergroepeer

$$\prod_{p \text{ priem}} \frac{1}{1-p^{-s}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

$$\frac{1}{1-2^{-s}} \times \frac{1}{1-3^{-s}} \times \cdots \times \frac{1}{1-p^{-s}} \times \cdots = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots$$

Back to the future

Leonhard Euler (1707-1783)

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \quad \text{dus} \quad \frac{1}{1-p^{-s}} = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \cdots$$

Herhaal voor alle priemgetallen p, vermenigvuldig en hergroepeer

$$\prod_{p \text{ priem}} \frac{1}{1-p^{-s}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

$$\frac{1}{1-2^{-s}} \times \frac{1}{1-3^{-s}} \times \cdots \times \frac{1}{1-p^{-s}} \times \cdots = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots$$

De zeta functie $\zeta(s)$

Bestudeer de zeta functie

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$$

Een oneindige som die convergeert (een eindig resultaat geeft) als $s > 1$.
$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, $\zeta(3) \approx 1.20205\ldots$ (Apéry constante), $\zeta(1) = \infty$

Maar s moet niet geheel zijn.
s kan ook reëel of zelfs complex zijn (P. Chebyshev).

De zeta functie $\zeta(s)$

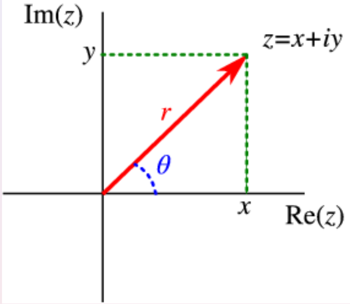
Bestudeer de zeta functie

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$$

Een oneindige som die convergeert (een eindig resultaat geeft) als $s > 1$.
$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, $\zeta(3) \approx 1.20205\ldots$ (Apéry constante), $\zeta(1) = \infty$

Maar s moet niet geheel zijn.
s kan ook reëel of zelfs complex zijn (P. Chebyshev).

Complexe getallen en functies



P. Chebyshev (1821-1894)

$$z = x + iy = re^{i\theta}$$

$$\begin{cases} i = \sqrt{-1} \\ x = \mathrm{Re}\,(z) = r\cos(\theta) \\ y = \mathrm{Im}\,(z) = r\sin(\theta) \\ r = |z| = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \arg(z) \end{cases}$$

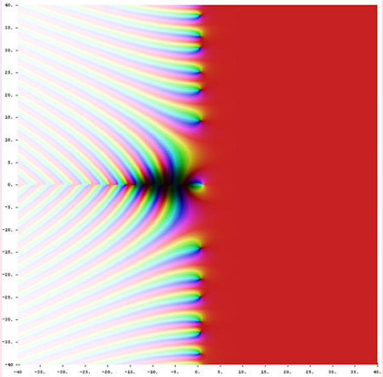
$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$
$$e^{i\pi} = -1$$

$\mathbb{C}$ is een 2D vlak.

$$\zeta(s) : s \in \mathbb{C} \to \zeta(s) \in \mathbb{C}.$$

Complexe getallen en functies

$\zeta(z) : z \in \mathbb{C} \to \zeta(z) \in \mathbb{C}$ is 4D (kan je niet meer tekenen)



bron: Wikipedia

$|\zeta(z)| =$ helderheid; $\arg(\zeta(z)) =$ kleur
$-40 < \mathrm{Re}\,(z) < 40$, $-40 < \mathrm{Im}\,(z) < 40$
Overal gedefinieerd (door continuering) behalve voor $z = 1$ ($\zeta(1) = \infty$)
Nul voor $z = -2, -4, -6, \ldots$ (triviale nulpunten)

Riemann hypothese

bron: Wikipedia

De Riemann hypothese

> **Alle niet-triviale nulpunten van $\zeta(z)$ liggen op de kritische lijn $\mathrm{Re}\,(z) = 1/2$**

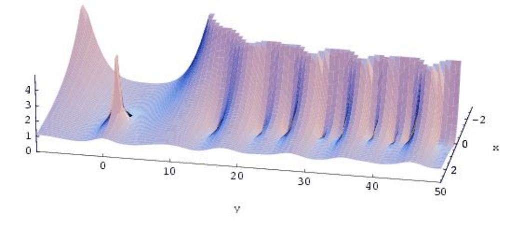
Riemann hypothese

bron: The Simpsons-Futurama
Simon Singh on twitter

De Riemann hypothese

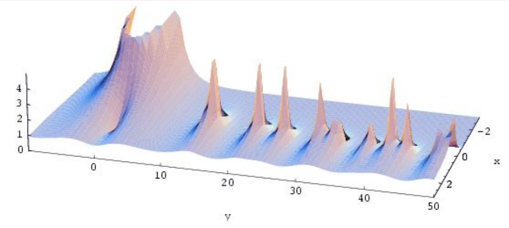
> **Alle niet-triviale nulpunten van $\zeta(z)$ liggen op de kritische lijn $\mathrm{Re}\,(z) = 1/2$**

Riemann hypothese



bron: Wolfram Mathworld

$|\zeta(z)|$



bron: Wolfram Mathworld

$1/|\zeta(z)|$

$\zeta(s)$ en priemgetallen

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ priem}} \frac{1}{1-p^{-s}} \Leftrightarrow \log \zeta(s) = \sum_{p \text{ priem}} -\log(1-p^{-s}).$$

en door de afgeleide te nemen† en te evalueren voor $s = 1/2 + it$ krijgt men $\psi(t)$
en wegens de symmetrie voor $t > 0$ en $t < 0$ heeft men voldoende aan het reële deel $\psi_r(t)$.

† $\frac{d}{ds} \log \zeta(s) = \frac{d\zeta(s)/ds}{\zeta(s)}$.

$\zeta(s)$ en priemgetallen

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ priem}} \frac{1}{1 - p^{-s}} \Leftrightarrow \log \zeta(s) = \sum_{p \text{ priem}} -\log(1 - p^{-s}).$$

en door de afgeleide te nemen[†] en te evalueren voor $s = 1/2 + it$ krijgt men $\psi(t)$
en wegens de symmetrie voor $t > 0$ en $t < 0$ heeft men voldoende aan het reële deel $\psi_r(t)$.

[†] $\frac{d}{ds} \log \zeta(s) = \frac{d\zeta(s)/ds}{\zeta(s)}$.

$\zeta(s)$ en priemgetallen

$$\begin{aligned}\psi_r(t) \quad = \quad & -\frac{\log(2)}{2^{1/2}}\cos(t\log(2)) - \frac{\log(3)}{3^{1/2}}\cos(t\log(3)) \\ & -\frac{\log(2)}{4^{1/2}}\cos(t\log(4)) - \frac{\log(5)}{5^{1/2}}\cos(t\log(5)) \\ & -\frac{\log(7)}{7^{1/2}}\cos(t\log(7)) - \frac{\log(2)}{8^{1/2}}\cos(t\log(8)) \\ & -\frac{\log(3)}{9^{1/2}}\cos(t\log(9)) - \frac{\log(11)}{11^{1/2}}\cos(t\log(11)) - \cdots\end{aligned}$$

$-\sum_{p^k} \frac{\log(p)}{p^{k/2}} \cos(t\log(p^k))$ is een Fourier-cosinus-reeks voor $\psi_r(t)$.

Benader $\sum_{p^k} \cdots$ met afgebroken som: $\sum_{p^k<C} \cdots$.

Bijvoorbeeld voor $C = 500$

$\zeta(s)$ en priemgetallen

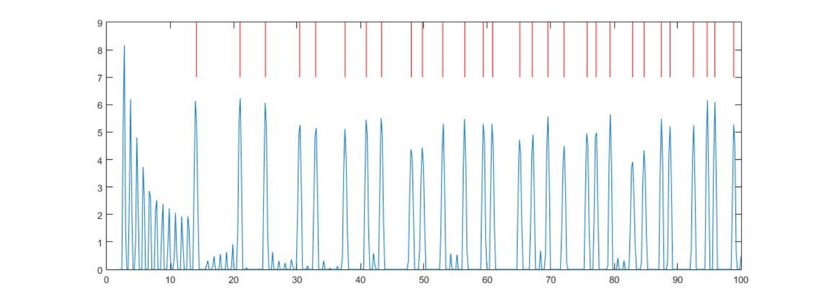
$$
\begin{aligned}
\psi_r(t) \;=\; & -\frac{\log(2)}{2^{1/2}}\cos(t\log(2)) - \frac{\log(3)}{3^{1/2}}\cos(t\log(3)) \\
& -\frac{\log(2)}{4^{1/2}}\cos(t\log(4)) - \frac{\log(5)}{5^{1/2}}\cos(t\log(5)) \\
& -\frac{\log(7)}{7^{1/2}}\cos(t\log(7)) - \frac{\log(2)}{8^{1/2}}\cos(t\log(8)) \\
& -\frac{\log(3)}{9^{1/2}}\cos(t\log(9)) - \frac{\log(11)}{11^{1/2}}\cos(t\log(11)) - \cdots
\end{aligned}
$$

$-\sum_{p^k} \frac{\log(p)}{p^{k/2}} \cos(t\log(p^k))$ is een Fourier-cosinus-reeks voor $\psi_r(t)$.

Benader $\sum_{p^k} \cdots$ met afgebroken som: $\sum_{p^k<C} \cdots$.

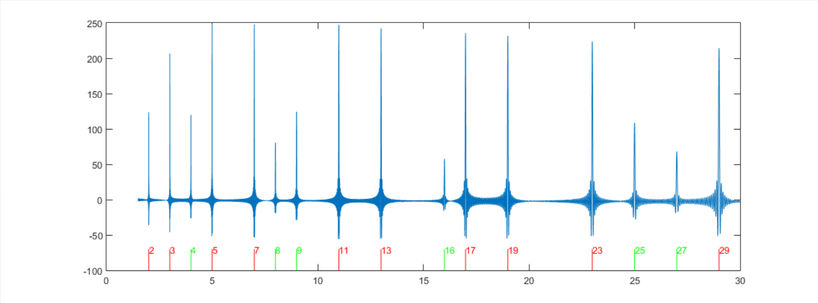
Bijvoorbeeld voor $C = 500$

$\zeta(s)$ en priemgetallen



Plot van het positieve deel van $-\sum_{p^k<500}\cdots$
Geeft pieken op de plaatsen
$t_1 \approx 14.134725$ $t_2 \approx 21.022040$, $t_3 \approx 25.010858$, $t_4 \approx 30.424876$, $t_5 \approx 32.935062$, $t_6 \approx 37.586178, \ldots$
en dat zijn net de nulpunten van de zeta functie.

$\zeta(s)$ en priemgetallen

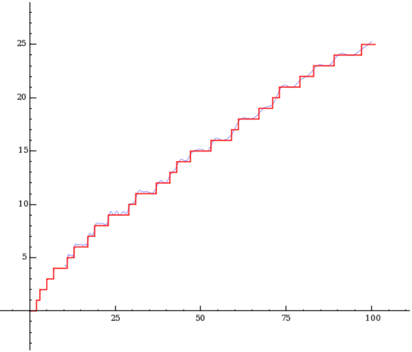


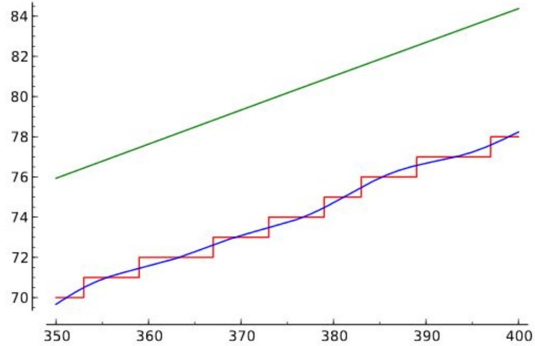
De reeks

$$P(x) = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \cos(\log(x) t_j)$$

geeft pieken op de plaats van de machten van priemgetallen.
Bovenstaande figuur gebruikt de eerste t_j, $j = 1, \ldots, 1000$.

$\zeta(s)$ en priemgetallen





Met de kennis van de t_j kan men ook een benadering opstellen van de trap $\pi(x)$: $\pi(x) \approx \mathrm{Li}(x) - \ln(2) + g(x) - \sum_\rho \mathrm{Li}(x^\rho)$, $\rho = 1/2 + it_j$
Bovenstaande figuur gebruikt de eerste t_j, $j = 1, ..., 50$.
De groene lijn is $\mathrm{Li}(x)$.

Riemann hypothese

Dit alles is slechts waar als de RH geldig is!
Alle experimenten bevestigen dat RH geldig is.
(correct voor $t_j < 10^{13}$ en nog een paar miljoen grotere waarden)
We weten zeker dat nulpunten liggen in $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$.

MAAR

Alle experimenten toonden $\mathrm{Li}(x) - \pi(x) > 0$.
Ook al was bewezen dat er oneindig veel snijdingen waren.
Er is een snijding in de buurt van $e^{727.95133} \approx 10^{315}$ (kleinste?)
Meest recente resultaat (Büthe, 2015): niet voor $x < 10^{19}$.

Riemann hypothese

Dit alles is slechts waar als de RH geldig is!
Alle experimenten bevestigen dat RH geldig is.
(correct voor $t_j < 10^{13}$ en nog een paar miljoen grotere waarden)
We weten zeker dat nulpunten liggen in $0 < \mathrm{Re}\,(s) < 1$.

MAAR

Alle experimenten toonden $\mathrm{Li}(x) - \pi(x) > 0$.
Ook al was bewezen dat er oneindig veel snijdingen waren.
Er is een snijding in de buurt van $e^{727.95133} \approx 10^{315}$ (kleinste?)
Meest recente resultaat (Büthe, 2015): niet voor $x < 10^{19}$.

Veralgemeende Riemann Hypothese

- Dirichlet L-functie
$$L(s,\chi) = \sum_{k-1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$
met $\chi(n) \in \{0, 1, -1, i, \dots\}$ en k-periodiek.
- Alle nulpunten van $L(s,\chi)$ in $0 < \mathrm{Re}\,(s) < 1$ hebben reëel deel $= 1/2$. Daarmee kan men bv onderzoeken hoe dikwijls men priemgetallen op een vaste afstand van elkaar kan vinden (bv. tweeling-, kozijn-, en sexy priemgetallen op een afstand 2, 4, 6 van elkaar)
- Er bestaan verschillende wiskundige manieren om (G)RH aan te pakken waar we hier nog niets over gezegd hebben.
Het enige wat we gedaan hebben is het verband leggen tussen RH en de priemgetallenverdeling

Veralgemeende Riemann Hypothese

- Dirichlet L-functie

$$L(s,\chi) = \sum_{k-1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

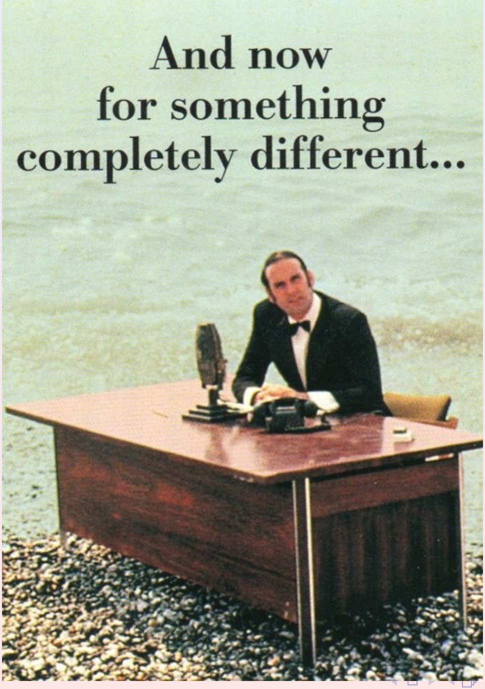
  met $\chi(n) \in \{0, 1, -1, i, ...\}$ en k-periodiek.

- Alle nulpunten van $L(s,\chi)$ in $0 < \mathrm{Re}\,(s) < 1$ hebben reëel deel $= 1/2$.
  Daarmee kan men bv onderzoeken hoe dikwijls men priemgetallen op een vaste afstand van elkaar kan vinden (bv. tweeling-, kozijn-, en sexy priemgetallen op een afstand 2, 4, 6 van elkaar)

- Er bestaan verschillende wiskundige manieren om (G)RH aan te pakken waar we hier nog niets over gezegd hebben.
  Het enige wat we gedaan hebben is het verband leggen tussen RH en de priemgetallenverdeling

Veralgemeende Riemann Hypothese

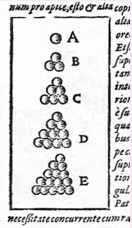
- Dirichlet L-functie
$$L(s,\chi) = \sum_{k-1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$
met $\chi(n) \in \{0, 1, -1, i, ...\}$ en k-periodiek.
- Alle nulpunten van $L(s,\chi)$ in $0 < \mathrm{Re}\,(s) < 1$ hebben reëel deel $= 1/2$. Daarmee kan men bv onderzoeken hoe dikwijls men priemgetallen op een vaste afstand van elkaar kan vinden (bv. tweeling-, kozijn-, en sexy priemgetallen op een afstand 2, 4, 6 van elkaar)
- Er bestaan verschillende wiskundige manieren om (G)RH aan te pakken waar we hier nog niets over gezegd hebben.
Het enige wat we gedaan hebben is het verband leggen tussen RH en de priemgetallenverdeling



bron: BBC

Het vermoeden van Kepler

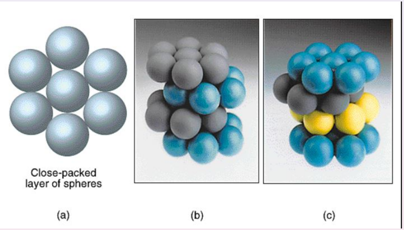
bron: Wikipedia

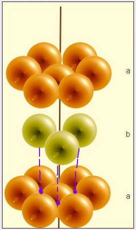


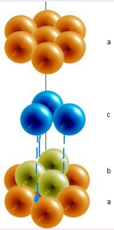
Johannes Kepler (1571-1630)

- identieke bollen kunnen de ruimte opvullen voor $\frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0.740480489\ldots$ (ongeveer 74.05 procent)
- in *Seu de Nive Sexangula* (1611) (nieuwjaarsgeschenk)
- veralgemening was op Hilbert's lijst in 1900, geen MPP in 2000.

Het vermoeden van Kepler



(d) 

(e) 

Twee equivalente versies

- hcp (hexagonal close packing) ABABAB... als in (b) en (d)
- fcc (face centered cubic)
  of ccp (cubic close packing) ABCABC... als in (c) en (e)
- equivalent: horizontale lagen in de ene = schuine lagen in de andere
- elke bol raakst aan 12 buren

bron prentjes: http://www.learneasy.info/MDME/focus/materials/enmat/LECTURES/Lecture-04/webpages/crystals.html

Het vermoeden van Kepler

- Bewezen door Gauss in 1831 voor regelmatig rooster.
- Voor willekeurige opvulling door Thomas Hales in 1998 (250 blz en 3Gb digitale bestanden)
- idee: buren of afstand 2.51 (geeft vrijheid) + optimalisatie met veel lokale minima.
- naar tijdschrift gezonden in 1999. In 2003 was men voor 99% zeker dat het correct was.
- probleem: bewijs met computerprogramma
- 4 kleurenprobleem (1976): computer test 1936 rest-gevallen

Het vermoeden van Kepler

- Bewezen door Gauss in 1831 voor regelmatig rooster.
- Voor willekeurige opvulling door Thomas Hales in 1998
  (250 blz en 3Gb digitale bestanden)
- idee: buren of afstand 2.51 (geeft vrijheid) + optimalisatie met veel lokale minima.
- naar tijdschrift gezonden in 1999.
  In 2003 was men voor 99% zeker dat het correct was.
- probleem: bewijs met computerprogramma
- 4 kleurenprobleem (1976): computer test 1936 rest-gevallen

Het vermoeden van Kepler

- Bewezen door Gauss in 1831 voor regelmatig rooster.
- Voor willekeurige opvulling door Thomas Hales in 1998
  (250 blz en 3Gb digitale bestanden)
- idee: buren of afstand 2.51 (geeft vrijheid) + optimalisatie met veel lokale minima.
- naar tijdschrift gezonden in 1999.
  In 2003 was men voor 99% zeker dat het correct was.
- probleem: bewijs met computerprogramma
- 4 kleurenprobleem (1976): computer test 1936 rest-gevallen

Het vermoeden van Kepler

- Bewezen door Gauss in 1831 voor regelmatig rooster.
- Voor willekeurige opvulling door Thomas Hales in 1998
  (250 blz en 3Gb digitale bestanden)
- idee: buren of afstand 2.51 (geeft vrijheid) + optimalisatie met veel lokale minima.
- naar tijdschrift gezonden in 1999.
  In 2003 was men voor 99% zeker dat het correct was.
- probleem: bewijs met computerprogramma
- 4 kleurenprobleem (1976): computer test 1936 rest-gevallen

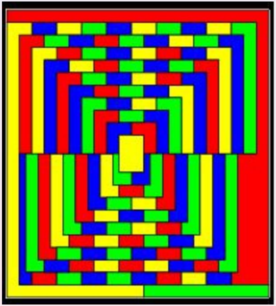
Het vermoeden van Kepler

- Bewezen door Gauss in 1831 voor regelmatig rooster.
- Voor willekeurige opvulling door Thomas Hales in 1998
  (250 blz en 3Gb digitale bestanden)
- idee: buren of afstand 2.51 (geeft vrijheid) + optimalisatie met veel lokale minima.
- naar tijdschrift gezonden in 1999.
  In 2003 was men voor 99% zeker dat het correct was.
- probleem: bewijs met computerprogramma
- 4 kleurenprobleem (1976): computer test 1936 rest-gevallen

Het vermoeden van Kepler

- Bewezen door Gauss in 1831 voor regelmatig rooster.
- Voor willekeurige opvulling door Thomas Hales in 1998
  (250 blz en 3Gb digitale bestanden)
- idee: buren of afstand 2.51 (geeft vrijheid) + optimalisatie met veel lokale minima.
- naar tijdschrift gezonden in 1999.
  In 2003 was men voor 99% zeker dat het correct was.
- probleem: bewijs met computerprogramma
- 4 kleurenprobleem (1976): computer test 1936 rest-gevallen

Het vermoeden van Kepler



bron: http://cdn-az.allevents.in/banners/a5b24652a3e098c7034b7e00a0bed8a1

Vierkleurenprobleem
geformuleerd door Francis Guthrie in 1852
Opgelost door Kenneth Appel en Wolfgang Haken in 1976

Het vermoeden van Kepler

- Bewezen door Gauss in 1831 voor regelmatig rooster.
- Voor willekeurige opvulling door Thomas Hales in 1998
  (250 blz en 3Gb digitale bestanden)
- idee: buren of afstand 2.51 (geeft vrijheid) + optimalisatie met veel lokale minima.
- naar tijdschrift gezonden in 1999.
  In 2003 was men voor 99% zeker dat het correct was.
- probleem: bewijs met computerprogramma
- 4 kleurenprobleem (1976): computer test 1936 rest-gevallen
- Hales: FlysPecK project = Formal Proof of Kepler (afgerond in 2015)

Het vermoeden van Kepler

bron: http://www.quantamagazine.org

Thomas Hales (1998)

Zijsprong

- Probleem: Hoe verifiëren we een bewijs?
- te uitgebreid Bewijzen van “de grote problemen” van deze tijd vragen soms honderden blz en/of computerprogramma’s. Hoe bewijs je dat een computerprogramma juist is?
- te gespecialiseerd Voorbeeld: Shinichi Mochizuki’s bewijs van de *ABC conjecture*
  [eindig veel a, b, c rel. priem en $a + b = c$ dan $c > \mathrm{rad}(abc)^{1+\epsilon}$]
- te vanzelfsprekend Niet elke stap volledig verantwoord.
  Camille Jordan (1887, 80 blz):
  Jordankromme vedeelt vlak in 2 gebieden
  Twijfel van Oswald Veblen.
  Computer geverifieerd door Hales met programma van 60 000 lijnen.

Zijsprong

- Probleem: Hoe verifiëren we een bewijs?
- te uitgebreid Bewijzen van “de grote problemen” van deze tijd vragen soms honderden blz en/of computerprogramma’s. Hoe bewijs je dat een computerprogramma juist is?
- te gespecialiseerd Voorbeeld: Shinichi Mochizuki’s bewijs van de *ABC conjecture*
  [eindig veel a, b, c rel. priem en $a+b=c$ dan $c > \mathrm{rad}(abc)^{1+\epsilon}$]
- te vanzelfsprekend Niet elke stap volledig verantwoord.
  Camille Jordan (1887, 80 blz):
  Jordankromme vedeelt vlak in 2 gebieden
  Twijfel van Oswald Veblen.
  Computer geverifieerd door Hales met programma van 60 000 lijnen.

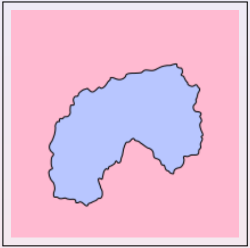
Zijsprong

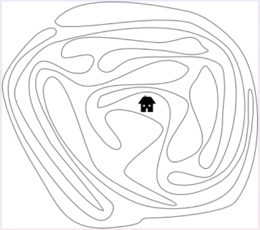
- Probleem: Hoe verifiëren we een bewijs?
- te uitgebreid Bewijzen van "de grote problemen" van deze tijd vragen soms honderden blz en/of computerprogramma's. Hoe bewijs je dat een computerprogramma juist is?
- te gespecialiseerd Voorbeeld: Shinichi Mochizuki's bewijs van de *ABC conjecture*
  [eindig veel a, b, c rel. priem en $a + b = c$ dan $c > \mathrm{rad}(abc)^{1+\epsilon}$]
- te vanzelfsprekend Niet elke stap volledig verantwoord.
  Camille Jordan (1887, 80 blz):
  Jordankromme vedeelt vlak in 2 gebieden
  Twijfel van Oswald Veblen.
  Computer geverifieerd door Hales met programma van 60 000 lijnen.

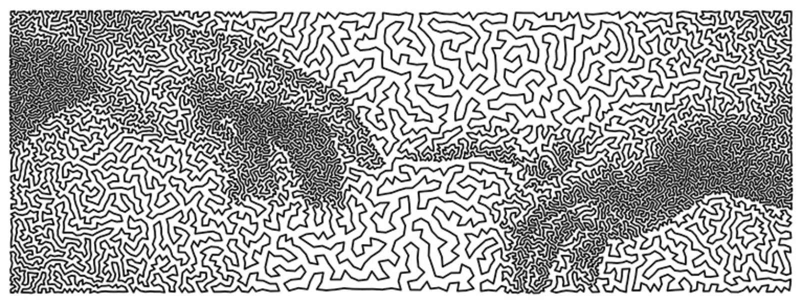
Zijsprong

- Probleem: Hoe verifiëren we een bewijs?
- te uitgebreid Bewijzen van “de grote problemen” van deze tijd vragen soms honderden blz en/of computerprogramma’s. Hoe bewijs je dat een computerprogramma juist is?
- te gespecialiseerd Voorbeeld: Shinichi Mochizuki’s bewijs van de *ABC conjecture*
  [eindig veel a, b, c rel. priem en $a + b = c$ dan $c > \mathrm{rad}(abc)^{1+\epsilon}$]
- te vanzelfsprekend Niet elke stap volledig verantwoord.
  Camille Jordan (1887, 80 blz):
  Jordankromme vedeelt vlak in 2 gebieden
  Twijfel van Oswald Veblen.
  Computer geverifieerd door Hales met programma van 60 000 lijnen.

Jordan curve







©Robert Bosch (TSP)

Jordankrommen

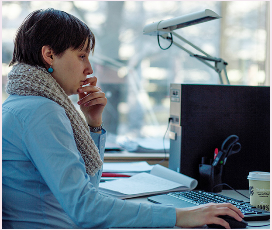
Het vermoeden van Kepler

- Kepler opgelost t/m dimensie 7 voor regelmatige roosters. Bij dim. 8 worden de 'gaten' zo groot dat er een extra bol in past
  Geeft extra symmetrie. Elke bol heeft 19650 buren.
- 13/3/2016, Maryna Viazovska rooster voor dimensie 8 (en voor 24)

  gebruikt modulaire vormen, complexe analyse, Fourier- en Laplace transformaties
- Onregelmatige opvulling???

- Kepler opgelost t/m dimensie 7 voor regelmatige roosters. Bij dim. 8 worden de 'gaten' zo groot dat er een extra bol in past
  Geeft extra symmetrie. Elke bol heeft 19650 buren.
- 13/3/2016, Maryna Viazovska rooster voor dimensie 8 (en voor 24)

bron: quantamagazine.org



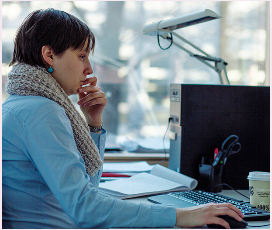
bron: M. Viazovska homepage

  gebruikt modulaire vormen, complexe analyse, Fourier- en Laplace transformaties
- Onregelmatige opvulling???

Het vermoeden van Kepler

- Kepler opgelost t/m dimensie 7 voor regelmatige roosters. Bij dim. 8 worden de ‘gaten’ zo groot dat er een extra bol in past
  Geeft extra symmetrie. Elke bol heeft 19650 buren.
- 13/3/2016, Maryna Viazovska rooster voor dimensie 8 (en voor 24)

  bron: quantamagazine.org

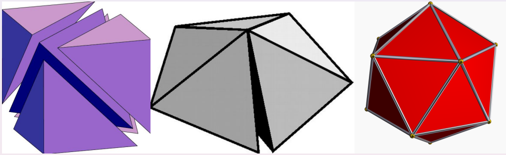
  

  bron: M. Viazovska homepage

  gebruikt modulaire vormen, complexe analyse, Fourier- en Laplace transformaties
- Onregelmatige opvulling???

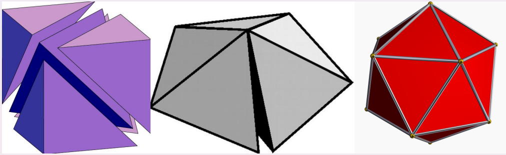
Het vermoeden van Kepler

- Hilbert's probleem ook voor niet-bollen bv. tetrahedra.



- regelmatige roosters = eenvoudig; onregelmatig = moeilijk
- Salvatore Torquanto en John Conway(2006) modules van 20 tetrahedra = (niet perfect passend) icosahedron: 71.75%
- Beth Chen's PhD (2010) 10 modules van 9 tetrahedra: 77.72% niet perfect, 'spleetjes' optimaliseren met computer: 77.86% (2008)

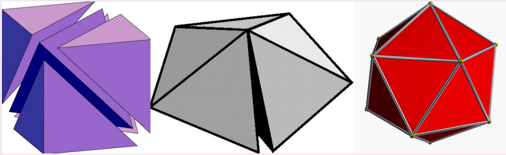
- Hilbert's probleem ook voor niet-bollen bv. tetrahedra.



- regelmatige roosters = eenvoudig; onregelmatig = moeilijk
- Salvatore Torquanto en John Conway(2006) modules van 20 tetrahedra = (niet perfect passend) icosahedron: 71.75%
- Beth Chen's PhD (2010) 10 modules van 9 tetrahedra: 77.72% niet perfect, 'spleetjes' optimaliseren met computer: 77.86% (2008)

Het vermoeden van Kepler

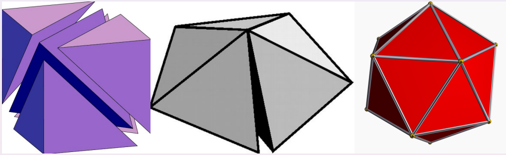
- Hilbert's probleem ook voor niet-bollen bv. tetrahedra.



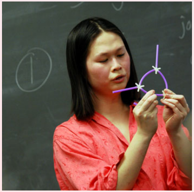
- regelmatige roosters = eenvoudig; onregelmatig = moeilijk
- Salvatore Torquanto en John Conway(2006) modules van 20 tetrahedra = (niet perfect passend) icosahedron: 71.75%
- Beth Chen's PhD (2010) 10 modules van 9 tetrahedra: 77.72% niet perfect, 'spleetjes' optimaliseren met computer: 77.86% (2008)

Het vermoeden van Kepler

- Hilbert's probleem ook voor niet-bollen bv. tetrahedra.



- regelmatige roosters = eenvoudig; onregelmatig = moeilijk
- Salvatore Torquanto en John Conway(2006) modules van 20 tetrahedra = (niet perfect passend) icosahedron: 71.75%
- Beth Chen's PhD (2010) 10 modules van 9 tetrahedra: 77.72% niet perfect, 'spleetjes' optimaliseren met computer: 77.86% (2008)



bron: B. Chen homepage

Het vermoeden van Kepler

- Sharon Glotzer (natuurkundige): Metropolis simulatie van thermodynamica van tetrahedra vloeistof.
  Zet onder hoge druk = optimale opvulling = 12-voudige symmetrie = 83% (2008).
  Niet geroosterd, maar resultaat is quasikristal !!!

bron: eNews Park Forest

P. Danoscheno, S. Glotzer, M. Engel (2012)

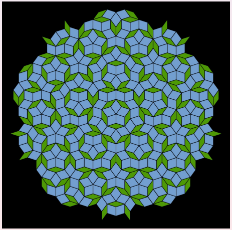
- Quasikristal = niet-periodieke maar toch lokaal regelmatige structuur, ondekt in 1980.

Het vermoeden van Kepler

- Sharon Glotzer (natuurkundige): Metropolis simulatie van thermodynamica van tetrahedra vloeistof.
  Zet onder hoge druk = optimale opvulling = 12-voudige symmetrie = 83% (2008).
  Niet geroosterd, maar resultaat is quasikristal !!!

bron: eNews Park Forest

P. Danoscheno, S. Glotzer, M. Engel (2012)



bron: Wikipedia

quasikristal

- Quasikristal = niet-periodieke maar toch lokaal regelmatige structuur, ondekt in 1980.

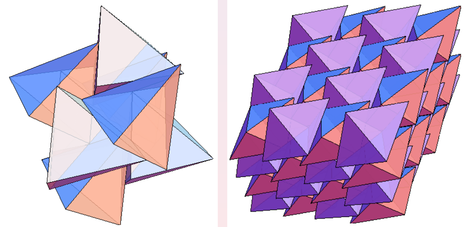
Het vermoeden van Kepler

- andere structuren met minder dan 10 of 9 tetrahedra getest
  83.24% → 85.03% (mid 2009) → 85.47% & 85.55% (eind 2009)
  Cornell groep, gebruikt dubbel rooster
- best tot nu toe met 4-tetrahedra-clusters: 85.63%
  (Chen, Engel en Glotzer, 2010)

- gebruikt een dubbel rooster van tetrahedra zonder symmetrie
- nog niet bewezen dat het de dichtst mogelijke opvulling is

Het vermoeden van Kepler

- andere structuren met minder dan 10 of 9 tetrahedra getest
  83.24% → 85.03% (mid 2009) → 85.47% & 85.55% (eind 2009)
  Cornell groep, gebruikt dubbel rooster
- best tot nu toe met 4-tetrahedra-clusters: 85.63%
  (Chen, Engel en Glotzer, 2010)

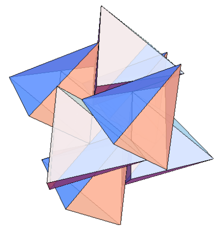


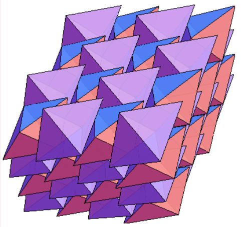
bron: http://blog.wolfram.com

- gebruikt een dubbel rooster van tetrahedra zonder symmetrie
- nog niet bewezen dat het de dichtst mogelijke opvulling is

Het vermoeden van Kepler

- andere structuren met minder dan 10 of 9 tetrahedra getest
  83.24% → 85.03% (mid 2009) → 85.47% & 85.55% (eind 2009)
  Cornell groep, gebruikt dubbel rooster
- best tot nu toe met 4-tetrahedra-clusters: 85.63%
  (Chen, Engel en Glotzer, 2010)



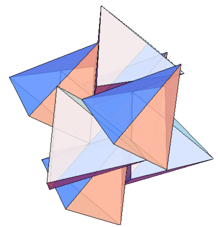


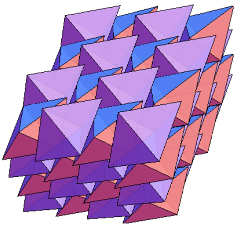
bron: http://blog.wolfram.com

- gebruikt een dubbel rooster van tetrahedra zonder symmetrie
- nog niet bewezen dat het de dichtst mogelijke opvulling is

Het vermoeden van Kepler

- andere structuren met minder dan 10 of 9 tetrahedra getest
  83.24% → 85.03% (mid 2009) → 85.47% & 85.55% (eind 2009)
  Cornell groep, gebruikt dubbel rooster
- best tot nu toe met 4-tetrahedra-clusters: 85.63%
  (Chen, Engel en Glotzer, 2010)





bron: http://blog.wolfram.com

- gebruikt een dubbel rooster van tetrahedra zonder symmetrie
- nog niet bewezen dat het de dichtst mogelijke opvulling is

...and the show goes on...

- elke oplossing stelt een nieuwe vraag
- wat met bollen van verschillende grootte?
- ...

...and the show goes on...

- elke oplossing stelt een nieuwe vraag
- wat met bollen van verschillende grootte?
- ...

...and the show goes on...

- elke oplossing stelt een nieuwe vraag
- wat met bollen van verschillende grootte?
- ...

Tot slot

- oplossingen vereisen combinatie van verschillende disciplines
- toepassingen en zuivere wiskunde komen elkaar vroeg of laat tegen
- computer gaat een steeds grotere rol spelen
-

Tot slot

- oplossingen vereisen combinatie van verschillende disciplines
- toepassingen en zuivere wiskunde komen elkaar vroeg of laat tegen
- computer gaat een steeds grotere rol spelen
- ...

Tot slot

- oplossingen vereisen combinatie van verschillende disciplines
- toepassingen en zuivere wiskunde komen elkaar vroeg of laat tegen
- computer gaat een steeds grotere rol spelen
- ...

Tot slot

- oplossingen vereisen combinatie van verschillende disciplines
- toepassingen en zuivere wiskunde komen elkaar vroeg of laat tegen
- computer gaat een steeds grotere rol spelen
- ...

Tot slot

- oplossingen vereisen combinatie van verschillende disciplines
- toepassingen en zuivere wiskunde komen elkaar vroeg of laat tegen
- computer gaat een steeds grotere rol spelen
- ...


AT MY AGE
I'VE
SEEN IT ALL
DONE IT ALL
HEARD IT ALL
I JUST CAN'T REMEMBER
IT ALL!
DANK U VOOR UW AANDACHT

Referenties

Over de Riemann hypothese zijn heel wat populariserende boeken verschenen. Twee recente zijn

- B. Mazur, W. Stein. *Prime Numbers and the Riemann Hypothesis*, Cambridge University Press, 2016.
- R. van der Veen, J, van de Craats. *The Riemann Hypothesis. A Million Dollar Problem*, Cambridge University Press, 2016.
- P. Ribenboim, *Prime Numbers, Friends Who Give Problems*, World Scientific, 2016.

Over het vermoeden van Kepler

- D. Mackenzie. *What's happening in the mathematical sciences vol 8*, Amer. Math. Soc., 2011.
- A. Nectoux. *What is the way of packing oranges?*, http://blog.kleinproject.org/?p=742, 2015, geraadpleegd 18-11-2016.
- E. Klarreich. *Sphere Packing Solved in Higher Dimensions*, Quanta magazine, 2016, http://www.quantamagazine.org/20160330-sphere-packing-solved-in-higher-dimensions/, geraadpleegd 18-11-2016.

Referenties

Over de Riemann hypothese zijn heel wat populariserende boeken verschenen. Twee recente zijn

- B. Mazur, W. Stein. *Prime Numbers and the Riemann Hypothesis*, Cambridge University Press, 2016.
- R. van der Veen, J, van de Craats. *The Riemann Hypothesis. A Million Dollar Problem*, Cambridge University Press, 2016.
- P. Ribenboim, *Prime Numbers, Friends Who Give Problems*, World Scientific, 2016.

Over het vermoeden van Kepler

- D. Mackenzie. *What's happening in the mathematical sciences vol 8*, Amer. Math. Soc., 2011.
- A. Nectoux. *What is the way of packing oranges?*, http://blog.kleinproject.org/?p=742, 2015, geraadpleegd 18-11-2016.
- E. Klarreich. *Sphere Packing Solved in Higher Dimensions*, Quanta magazine, 2016, http://www.quantamagazine.org/20160330-sphere-packing-solved-in-higher-dimensions/, geraadpleegd 18-11-2016.

Vragen

- wiskunde ontdekt of gecreëerd?
- belang van wiskunde in de maatschapij (gecijferdheid)
- knuffelwiskunde bevordert de interesse voor wiskunde niet
- een bewijs door een computer is geen echt wiskundig bewijs
- vooruitgang wordt gehinderd door specialisatie
- er is zuivere wiskunde en al de rest is toegepaste wiskunde
- is wiskunde een natuurwetenschap?

Voor als de inspiratie op is

- wiskunde bepaalt de maturiteit van een wetenschap
- het universum is een eindige wiskundige constructie
- waarom onstond grafentheorie in Köningsberg?
- bewijs PGS door Selberg en Erdős niet onafhankelijk gevonden
- een bewijs moet constructief zijn
- waarom worden wiskundigen als excentriekelingen voorgesteld?
- zijn priemgetallen eenzaam?
- gebruikte logaritmetafels hebben geleid tot fraudebestrijding
- wat heeft het getal e met intrest te maken?